2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий// Тр.моск.матем.о -ва.М.,1953.Т.2.С.275-382.
3. Е в т у ш и к Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1987.Т.9.С.7-270.
4. И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1984.Вып.15.С.32-37.
5. И в л е в Е.Т.,Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов,определяемых двухвалентными тензорами // Материалы 3 науч.конф.по матем.и мех./Томский ун-т.Томск,1973.Вып.I.С.50-52.

УДК 514.75

КОМПЛЕКСЫ W КУБИК В P_3

В.Б.К и м
(Кемеровский ун-т)

В работах [I] ,[2] рассмотрены комплексы (трехпараметрические семейства) V_3 и однопараметрические семейства V_1 плоских кривых третьего порядка (кубик) в пространстве P_3 соответственно.В данной работе изучаются комплексы кубик , характеризующиеся свойствами своих однопараметрических семейств.Все используемые величины и обозначения приведены в [1]и [2]. Индексы i,j,k,ℓ принимают значения I,2,3.

I.Выведем предварительно некоторые соотношения.Используя введенные в [I] и [2] величины,можно показать,что объекты

$$B^{ijk\ell} = b^{ijk\ell} - (a^{\ell(ij}\nu^{k)} - a^{ijk}\nu^{\ell}) \tag{I}$$

и

$$\beta^{ijk} = b^{ijk} - (a^{\ell(ij}\mu^{k)} - a^{ijk}\mu^{\ell})b_\ell \tag{2}$$

являются тензорами для комплекса V_3 и однопараметрического семейства V_1 кубик соответственно.Здесь и далее по индексам, заключенным в скобки,производится циклирование.

Пусть V_1 -произвольное однопараметрическое семейство кубик,принадлежащее комплексу V_3 .Его можно задать уравнениями

$$\omega_i = b_i\theta\ ; \quad \nabla a_{ijk} = a_{ijk}\omega_0^0 + b_{ijk}\theta, \tag{3}$$

где b_i удовлетворяют условию относительной инвариантности [3]. Вдоль этого семейства величины $b^{ijk\ell}$, b^{ijk}, b^{ℓ} связаны соотношениями

$$b^{ijk} = b^{ijk\ell}b_\ell . \tag{4}$$

Выражая $b^{ijk\ell}$ и b^{ijk} из (I) и (2) и подставляя полученные выражения в (4),находим

$$\beta^{ijk} + (a^{\ell(ij}\mu^{k)} - a^{ijk}\mu^{\ell})b_\ell = B^{ijk\ell}b_\ell + (a^{\ell(ij}\nu^{k)} - a^{ijk}\nu^{\ell})b_\ell . \tag{5}$$

Свернув (5) последовательно с b_k и b_ℓ ,получим

$$B^{ijk\ell}b_j b_k b_\ell = a(\mu^i - \nu^i) - a^{\ell ik}b_k b_\ell(b_j\mu^j - b_j\nu^j) . \tag{6}$$

Наконец,свернув (6) с b_i ,получим

$$B^{ijk\ell}b_i b_j b_k b_\ell = a(\beta - 2b_i\nu^i). \tag{7}$$

Обозначим через $P(V_1)$ оснащающую точку P семейства V_1 , а через $\pi(V_1)$ -плоскость,проходящую через $P(V_1)$ и характеристику ℓ плоскости кубики вдоль семейства V_1 .

2.О п р е д е л е н и е I. Комплекс V_3 кубик,характеризующийся условием

$$B^{(ijk\ell)} = 0, \tag{8}$$

называется комплексом W_0 .

Т е о р е м а I. Комплекс V_3 будет комплексом W_0 тогда и только тогда,когда его оснащающая точка M [1] инцидентна плоскости $\pi(V_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для любого однопараметрического семейства V_1 комплекса плоскость $\pi(V_1)$ и точка M инцидентны.Тогда из [I] и [2] вытекает:

$$\beta_i\nu^i = \frac{\beta}{2} . \tag{9}$$

Из (9) и (7) следует

$$B^{ijk\ell}b_i b_j b_k b_\ell = 0 . \tag{10}$$

Так как последнее условие должно выполняться для любых b_i ,то согласно [4] получаем

$$B^{(ijkl)}=0, \tag{11}$$

то есть рассматриваемый комплекс является комплексом W_0. Напротив, если выполнено (11), то для всех b_i выполнено (10), откуда, в свою очередь, в силу (7) следует (9), что означает инцидентность точки M и плоскости $\pi(V_1)$.

3. Рассмотрим обращенный тензор a^{ijk} [1]. С ним ассоциируется уравнение Монжа [5]:

$$a^{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k=0. \tag{12}$$

Каждой интегральной кривой уравнения (12) соответствует однопараметрическое семейство V_1 кубик комплекса, вдоль которого характеристика $\ell(V_1)$ плоскости кубики принадлежит кривой K^3 [1]. Интегральную кривую уравнения (12) назовем асимптотической, если для соответствующего семейства V_1 второй полюс прямой $\ell(V_1)$ относительно кривой K^3 совпадает с точкой возврата луча торса, огибаемого плоскостями кубик рассматриваемого семейства.

Асимптотические линии уравнения (12) определяются системой

$$\begin{cases} a^{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k=0,\\ B^{ijkl}\omega_i\omega_j\omega_k\omega_\ell=0. \end{cases} \tag{13}$$

Т е о р е м а 2. Для комплексов W_0 и только для них асимптотические линии уравнения (12) не определены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Асимптотические линии уравнения (12) будут не определены тогда и только тогда, когда уравнение системы (13) является следствием первого, т.е. когда выполняется соотношение

$$B^{(ijkl)}=a^{(ijk}\xi^{\ell)}. \tag{14}$$

Свернув (14) с a_{ijk} и учитывая (1), получим $\xi^\ell=0$, и, следовательно, $B^{(ijkl)}=0$.

3. О п р е д е л е н и е 2. Комплекс кубик, характеризующийся условием

$$B^{ijkl}=0, \tag{15}$$

называется комплексом W.

Т е о р е м а 3. Комплекс кубик будет комплексом W тогда и только тогда, когда для любого однопараметрического семейства V_1 комплекса точка $P(V_1)$ совпадает с оснащающей точкой M комплекса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено (15). Тогда из (7) вытекает $b_i\nu^i=\frac{\varepsilon}{2}$. В силу соотношения (10) из [2] получаем $b_i\mu^i=b_i\nu^i$. Тогда из (6) следует

$$\nu^i=\mu^i, \tag{16}$$

что равносильно совпадению точек M и $P(V_1)$. Напротив, пусть выполнено (16). Тогда $b_i\nu^i=b_i\mu^i=\frac{\varepsilon}{2}$. Из (6) и (7) в этом случае получаем

$$B^{ijkl}b_ib_jb_kb_\ell=0,\quad B^{ijkl}b_jb_kb_\ell=0. \tag{17}$$

Уравнения (17) должны выполняться для любых b_i. Тогда согласно [4] имеем $B^{(ijkl)}=0$, $B^{i(jkl)}=0$. Отсюда в силу симметрии тензора B^{ijkl} по первым индексам получаем $B^{ijkl}=0$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. К и м В.Б. О некоторых классах комплексов кубик в P_3. Кемерово, 1982. Деп. в ВИНИТИ 18.02.82. № 734.

2. К и м В.Б. Об одном классе однопараметрических семейств кубик в P_3 // Теория функций и ее приложения. Кемерово, 1985.

3. М а л а х о в с к и й В.С. К геометрии касательно оснащенных подмногообразий // Изв. вузов. Матем. 1972. № 9. С. 54–65.

4. Г у р е в и ч Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.; Л., 1948.

5. С и н ц о в Д.М. Геометрия монжевых уравнений // Работы по неголономной геометрии. Киев: Высшая школа, 1972. С. 102–116.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ СЕТЕЙ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ ЕВКЛИДОВА n-ПРОСТРАНСТВА

Г.В. К у з н е ц о в
(МГПИ им В.И. Ленина)

В данной работе изучаются свойства сети линий кривизны относительно поля $\vec{e}_n$ вдоль распределения Δ_{n-1}, причем вектор $\vec{e}_n$ перпендикулярен Δ_{n-1}.

В евклидовом пространстве E_n даны область Ω и распреде-